Rappels du cours précédent :

- but : approximation des fonctions (développer dans une base)
- on doit travailler dans des espaces de dim = ∞

  problèmes :
  - pas d'équivalence de bases
  - convergence (∞ de "coordonnées")
- EV + norme = EVN (résoud le pb 2)
  - nouveau pb : suites de Cauchy ne sont pas forcement convergentes vers les élément de même espace. ("éponge")
- EVN complet = espace de Banach
  - il faut ajouter toutes les limites des suites de Cauchy
- cas particulièrement important des EVN
  → espaces munis d'un produit scalaire
  - produit scalaire définit une norme mais la réciproque n'est pas toujours vraie
- Espace de Hilbert = espace muni d'un produit scalaire et complet p.r. à la norme associée à ce produit

Nous allons voir qu'on peut travailler avec les E.H. de façon analogue aux espaces de dim $< \infty$.

§1. Suites orthonormées

Déf. 1 Soit V un espace de Hilbert. $x, y \in V$ sont dits orthogonaux si $(x,y) = 0$.

Déf. 2 Soit $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de vecteurs dans un E.H. V. On dit que cette suite est orthonormée si $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$.

Prop. 3 Soient $\{x_k\}$ une suite orthonormée dans un E.H. V et $c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{C}$ des nombres complexes tels que $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ (c'est-à-dire, que la suite $\{c_k\}$ est un point dans ℓ^2). Alors la série $\sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j$ converge vers un élément de V.

▲ Montrons que les sommes partielles forment une suite de Cauchy ($y_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$). Pour $n > m$ on obtient

$$\|y_n - y_m\| = \Big\|\sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j\Big\| = \Big(\sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j , \sum_{k=m+1}^{n} c_k x_k\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\sum_{j=m+1}^{n} \sum_{k=m+1}^{n} (c_j x_j , c_k x_k)\Big)^{1/2} =$$

nombres vecteurs

$$= \Big[\sum_{j=m+1}^{n} \sum_{k=m+1}^{n} \overline{c_j}\, c_k \underbrace{(x_j, x_k)}_{\delta_{jk}}\Big]^{1/2} =$$

δ_{jk} car la suite est orthonormée

$$= \Big[\sum_{j=m+1}^{n} \sum_{k=m+1}^{n} \overline{c_j}\, c_k\, \delta_{jk}\Big]^{1/2} =$$

$$= \Big(\sum_{j=m+1}^{n} |c_j|^2\Big)^{1/2} \longrightarrow 0$$

lorsque $m, n \to \infty$ (car $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2$ converge et donc la suite des nombres $\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2$ est de Cauchy.

Par hypothèse, V est un E.H. (donc complet), ce qui signifie que toute suite de Cauchy dans V est convergente. ▼

Déf. 4 Soit $\{x_k\}$ une suite orthonormée dans un E.H. V. Pour $f \in V$ les nombres (x_j, f) sont appelés les coefficients de Fourier p.r. à la suite $\{x_k\}$.

Prop. 5 Soit $\{x_k\}$ une suite orthonormée dans un E.H. V
Pour tout $f \in V$ on a l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(x_j, f)|^2 \leq \|f\|^2$$

inégalité de Bessel

▼ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leq \left(f - \sum_{j=1}^{n} (x_j, f)\, x_j \,,\; f - \sum_{k=1}^{n} (x_k, f)\, x_k \right) =$$

$$= (f, f) - \sum_{j=1}^{n} \big((x_j, f)\, x_j \,,\; f \big) - \sum_{k=1}^{n} \big(f, (x_k, f)\, x_k \big) +$$

nombre vecteurs

nombre

vecteurs

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \big((x_j, f)\, x_j \,,\; (x_k, f)\, x_k \big) =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{(x_j, f)}\, (x_j, f) - \sum_{k=1}^{n} (x_k, f)\, \underbrace{(f, x_k)}_{=\,\overline{(x_k, f)}}$$

d'après les propriétés du p.s.

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{(x_j, f)}\, (x_k, f)\, \underbrace{(x_j, x_k)}_{=\,\delta_{jk}} =$$

$$= \|f\|^2 - 2 \sum_{j=1}^{n} |(x_j, f)|^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{(x_j, f)}\, (x_k, f)\, \delta_{jk}$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(x_j, f)|^2 \,,$$ d'où le résultat. ▼

Prop. 6 Soient $\{x_k\}$ une suite orthonormée dans un espace de Hilbert V et $f \in V$. La série

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x_j, f)\, x_j$$ converge vers un élément de V (mais pas forcement vers f)

▼ D'après l'inégalité de Bessel nous avons

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(x_j, f)|^2 \leq \|f\|^2 < \infty$$

On peut donc utiliser Prop. 3 avec $c_j = (x_j, f)$. ▼

On peut pouvoir choisir une base $\{x_j\}$ dans laquelle

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x_j, f)\, x_j = f$$

(comme pour les espaces de dim $< \infty$).

<u>Déf. 7</u> Une suite orthonormée $\{x_k\}$ dans un E.H. V est dite complète si V ne contient pas d'éléments non nuls orthogonaux à tous les $\{x_j\}$. Une suite orthonormée complète est souvent appelée une base hilbertienne de V.

<u>Théorème 8</u>. Soit $\{x_k\}$ une suite orthonormée ~~complète~~ dans un E.H. V. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

1). $\{x_k\}$ est complète

2). $\forall f \in V, \quad f = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, f)\, x_j$

3). $\forall f, g \in V, \quad (f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} (f, x_j)(x_j, g)$.

4). $\forall f \in V, \quad \|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(x_j, f)|^2$. (égalité de Parseval)

▼ Nous allons démontrer que 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3). $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

<u>1) $\Rightarrow$ 2).</u> Pour tout $f \in V$ le vecteur $f - \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, f)\, x_j$ est orthogonal à tous les x_k car:

$$\Big(x_k\,,\, f - \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, f)\, x_j\Big) = (x_k, f) - \sum_{j=1}^{\infty} \big(x_k, (x_j, f) x_j\big) =$$

$$= (x_k, f) - \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, f)\, \underbrace{(x_k, x_j)}_{\delta_{jk}} = (x_k, f) - (x_k, f) = 0$$

Donc, car $\{x_k\}$ est complète, on obtient 2).

2). $\Rightarrow$ 3). Nous avons

$$(f, g) = \left|\begin{matrix}\text{d'après}\\ 2).\end{matrix}\right| = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} (x_j, f)\, x_j\,,\, g\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \big((x_j, f)\, x_j, g\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\overline{(x_j, f)}}_{(f, x_j)}\, (x_j, g) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (f, x_j)(x_j, g).$$

3) $\Rightarrow$ 4). On pose $f = g$ dans 3) :

$$(f,f) = \|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{(f,x_j)}_{=\overline{(x_j,f)}} (x_j,f) = \sum_{j=1}^{\infty} |(x_j,f)|^2 .$$

4). $\Rightarrow$ 1). S'il existe un f orthogonal à tous les x_j, alors, d'après 4), $\|f\| = 0$, d'où $f = 0$ par définition de la norme. $\blacktriangledown$

§ 2. Un autre point de vue sur L^2.

Notons $\mathcal{D}_2$ l'espace $\mathcal{D}$ muni de la norme L^2 :

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx$$

$\mathcal{D}_2$ est préhilbertien : le produit scalaire est défini par

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

C'est un EVN non-complet. Nous allons maintenant compléter cet espace en ajoutant les "limites" des suites de Cauchy. Il s'avère que ces points limites sont des distributions.

Pour toute suite de Cauchy $\{f_k\}$ dans $\mathcal{D}_2$ la suite des nombres $\{\|f_k\|\}$ est de Cauchy car d'après l'inégalité triangulaire

$$\big|\, \|f_m\| - \|f_n\| \,\big| \leq \|f_m - f_n\|$$

Démonstration:
$$f_m = f_m - f_n + f_n$$
$$\Downarrow$$
$$\|f_m\| \leq \|f_m - f_n\| + \|f_n\|$$
$$\Downarrow$$
$$\|f_m\| - \|f_n\| \leq \|f_m - f_n\|$$
et on peut remplacer $m \leftrightarrow n$ au besoin

Donc la suite $\{\|f_k\|\}$ des normes est convergente même si $\{f_k\}$ ne converge pas (dans $\mathcal{D}_2$, p.r à la norme L^2). De la même manière, si $\{f_k\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{D}_2$, alors la suite des nombres $\{(\varphi, f_k)\}$ est convergente $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, car (d'après l'inégalité de Schwarz) :

$$|(\varphi, f_k) - (\varphi, f_\ell)| = |(\varphi, f_k - f_\ell)| \leq \|\varphi\| \cdot \|f_k - f_\ell\| \to 0$$

(car $\{f_k\}$ est une suite de Cauchy)

Donc $\{(\varphi, f_k)\}$ est une suite de Cauchy de nombres, donc convergente. Alors on peut <u>définir</u> la distribution f par l'équation

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{k \to \infty} (\overline{\varphi}, f_k) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

(cette équation définit une fonctionnelle linéaire).

<u>Prop. 9</u> Deux suites de Cauchy $\{f_k\}$ et $\{g_k\}$ définissent la même distribution si et seulement si elles sont équivalentes (c'est-à-dire, $\|f_k - g_k\| \to 0$ pour $k \to \infty$).

<u>Déf. 10</u> L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble de toutes les distributions définies par les suites de Cauchy de $\mathcal{D}_2$, avec le produit scalaire défini par

$$(f, g) = \lim_{k \to \infty} (f_k, g_k)$$

où $\{f_k\}$ et $\{g_k\}$ sont les suites de Cauchy qui déterminent les distributions f et g.